

Les nombres triangulaires

1. Pour tous

a) Calculez T_5 , T_6 , T_7 , T_8

$T(5) = 15$, $T(6) = 21$, $T(7) = 28$, $T(8) = 36$.

b) Exprimez T_n en fonction de n sous la forme d'une somme d'entiers.

$T(n) = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$.

Pour calculer un nombre triangulaire on utilise la formule $2T(n) = n(n+1)$

c) 2016 est-il un nombre triangulaire ?

$T(63) = 63 \times 32 = 2016$.

d) Les entiers 1 et 36 sont des nombres triangulaires égaux au carré d'un nombre entier.

Trouvez au moins un autre nombre triangulaire égal au carré d'un nombre entier.

$T(8) = 36 = 6^2$, $T(49) = 1225 = 35^2$, $T(288) = 41616 = 204^2$, ...

Il en existe une infinité. Une solution détaillée figure page 75 du livre :

Le Tournoi Mathématique du Limousin, Sujets et corrigés des problèmes de 1996 à 2010, édité chez Pulim.

2. Uniquement pour les premières et les terminales:

e) Montrez que la différence des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est le cube d'un entier.

$T(n)^2 - T(n-1)^2 = (n(n+1)/2)^2 - (n(n-1)/2)^2 = n^3$

On en déduit que la somme des cubes des n premiers entiers positifs est égale à $T(n)^2$.

f) Les nombres triangulaires peuvent-ils se terminer par n'importe quel chiffre ?

Si $n = 20q + r$ avec r compris entre 0 et 19 on calcule : $T(n) = (n^2 + n)/2 = 100q^2 + 20qr + 10q + T(r)$.

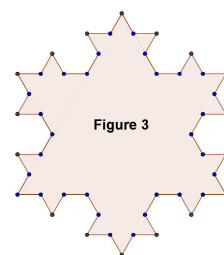
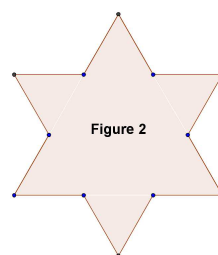
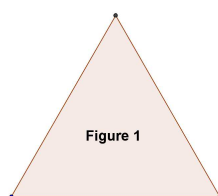
$T(n)$ a donc le même chiffre des unités que $T(r)$. Il suffit donc de calculer le chiffre des unités des $T(r)$ pour r compris entre 0 et 19 : 0,1,3,6,0,5,1,8,6,5,5,6,8,1,5,0,6,3,1,0.

Les nombres triangulaires peuvent donc se terminer par les chiffres 0,1,3,5,6,8 mais pas par les chiffres 2,4,7,9.

Il neige des flocons ... de Von Koch !

Pour obtenir un flocon de Von Koch, on considère un triangle équilatéral de 12 cm de côté sur lequel on procède au programme suivant:

- on divise chacun des segments de la figure en trois segments de même longueur
- on construit sur chaque segment médian à l'extérieur du triangle de base, un triangle équilatéral
- on supprime chacun des segments médians
- on recommence les étapes précédentes.



1. Calculez le périmètre de chacune des trois figures.

La figure 1 a pour périmètre 36 cm.

Dans la figure 2 il y a 12 segments de longueur 4 cm, son périmètre est donc égal à 48 cm.

Dans la figure 3 il y a $4 \times 12 = 48$ segments de longueur $4/3$ cm, son périmètre est donc égal à 64 cm.

2. Quel serait le périmètre de la figure 4 ? De la figure n ?

Quand on passe d'une figure à la suivante, le nombre de segments est multiplié par 4 alors que la longueur de chaque segment est divisée par 3. Le périmètre est donc multiplié par $4/3$.

Pour la figure 4 on obtient $64 \times 4/3 = 256/3$ cm.

Pour la figure n on obtient $36 \times (4/3)^{n-1}$ (suite géométrique de raison $4/3$).

3. On désigne par A l'aire de la figure 1. Quelle fraction de A mesure l'aire de la figure 2 ?

L'aire de la figure 3 ? L'aire de la figure n ?

Pour passer de la figure 1 à la figure 2 on ajoute à l'extérieur 3 triangles équilatéraux de côté égal à 4 cm.

Chacun de ces triangles a donc une aire égale à $A/9$. L'aire de la figure 2 est donc égale à $A + 3A/9 = 4A/3$.

Pour passer de la figure 2 (qui est formée de 12 segments) à la figure 3 on ajoute à l'extérieur 12 triangles équilatéraux de côté égal à $4/3$ cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à $A/81$.

L'aire de la figure 3 est donc égale à $4A/3 + 12A/81 = 40A/27$.

Pour passer de la figure n-1 (qui est formée de $3 \times 4^{n-2}$ segments) à la figure n on ajoute à l'extérieur $3 \times 4^{n-2}$ triangles équilatéraux de côté égal à $12/3^{n-1}$ cm. Chacun de ces triangles a donc une aire égale à $A/9^{n-1}$.

L'aire de la figure n est donc égale à $u(n) = u(n-1) + 3 \times 4^{n-2} \times A / 9^{n-1} = u(n-1) + A/3 \times (4/9)^{n-2}$

Avec $u(1) = A$ on obtient $u(n) = A + A/3 (1 + 4/9 + \dots + (4/9)^{n-2}) = 8A/5 - 3A/5 \times (4/9)^{n-1}$.

L'invasion des 1

Dans ce problème on a seulement le droit d'utiliser le nombre 1, des additions, des multiplications et des paires de parenthèses (mais on ne peut pas utiliser les nombres 11, 111, ...).

En utilisant exactement 5 fois le nombre 1 on peut obtenir tous les entiers compris entre 1 et 6.

Par exemple : $1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 3$ et $(1 + 1) \times (1 + 1 + 1) = 6$.

1. Montrez qu'avec exactement 6 fois le nombre 1 on peut obtenir tous les entiers de 1 à 9.

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$$

$$1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3$$

$$1 + 1 + 1 + 1 \times 1 \times 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 \times 1 = 5$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1) + 1 = 7$$

$$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 8$$

$$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) = 9$$

2. Quels entiers peut-on obtenir avec exactement 7 fois le nombre 1 ?

En remplaçant le premier 1 par 1×1 dans les égalités précédentes on peut déjà obtenir tous les entiers de 1 à 9 avec exactement 7 fois 1. On a de plus :

$$(1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 10$$

$$(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) = 12$$

On ne peut pas obtenir 11 ni les entiers strictement supérieurs à 12.

3. Quel est le plus grand entier qu'on peut obtenir avec exactement 10 fois le nombre 1 ?

Avec 10 fois le nombre 1 on peut obtenir $36 = (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1)$.

4. Obtenez ainsi 2016 avec le minimum de fois le nombre 1.

On peut obtenir 2016 avec 22 fois le nombre 1 :

$$2016 = (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times ((1 + 1) \times (1 + 1 + 1) + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1)$$

Avec 21 fois le nombre 1 on peut obtenir $3^7 = 2187$ mais si on remplace 3×3 par 2×4 on n'arrive qu'à 1944.

5. Quel est le plus grand entier qu'on peut obtenir avec exactement n fois le nombre 1 ?

$(1 + \dots + 1)$ avec n fois 1 est plus petit que $(1 + 1 + 1) \times (1 + \dots + 1)$ avec $n-3$ fois 1 entre les deuxièmes parenthèses si $n < 3 \times (n-3)$ c'est-à-dire $n > 4$.

On peut remplacer $(1 + 1 + 1 + 1)$ par $(1 + 1) \times (1 + 1)$.

$(1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1)$ est plus petit que $(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1)$.

Par suite, quand on écrit un entier N comme un produit d'entiers en utilisant le minimum de 1, il y a des 3 et au maximum deux fois 2. Le plus grand entier N qu'on peut obtenir avec exactement n fois le nombre 1 est :

- si $n=3k$, $N = 3^k = (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times \dots \times (1 + 1 + 1)$ avec k fois $(1 + 1 + 1)$.

- si $n=3k+1$, $N = 4 \times 3^{k-1} = (1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times \dots \times (1 + 1 + 1)$ avec $k-1$ fois $(1 + 1 + 1)$.

- si $n=3k+2$, $N = 2 \times 3^k = (1 + 1) \times (1 + 1 + 1) \times \dots \times (1 + 1 + 1)$ avec k fois $(1 + 1 + 1)$.

C'est renversant !

En utilisant tous les chiffres de 1 à 9, Léon a formé trois nombres de trois chiffres qu'il a ajoutés pour former une somme S . Noël a renversé les trois nombres formés par Léon (par exemple 135 devient 531) et a calculé leur somme S' .

1. Dans cette partie, Léon a obtenu $S = 2016$.

a) Montrez sur un exemple que Léon peut effectivement obtenir $S = 2016$ et donnez pour cet exemple la valeur de S' , somme obtenue par Noël.

Par exemple $S = 451 + 672 + 893 = 2016$ qui donne $S' = 154 + 276 + 398 = 828$.

Ou bien $S = 312 + 746 + 958 = 2016$ qui donne $S' = 213 + 647 + 859 = 1719$.

b) Quelles sont les différentes sommes S' que Noël peut obtenir ?

Notons A la somme des chiffres des centaines des 3 nombres choisis par Léon, B la somme des chiffres des dizaines et C la somme des chiffres des unités. On a donc $S = 100A + 10B + C$ et $S' = 100C + 10B + A$.

De plus, $A+B+C = 1+2+\dots+9 = 45$. On en déduit $S=99A + 9B + 45 = 9(11A+B)+45$.

Par suite $S = 2016$ est équivalent à $11A+B=219$.

De plus, les sommes A , B et C sont comprises entre $1+2+3 = 6$ et $7+8+9 = 24$ donc A est compris entre $(219-24)/11 \approx 17,7$ et $(219-6)/11 \approx 19,4$. Par suite il n'y a que deux possibilités:

$A=18$, $B=21$, $C=6$ qui donne $S' = 828$

$A=19$, $B=10$, $C=16$ qui donne $S' = 1719$.

2. Dans cette partie, Léon a obtenu une somme S non précisée.

a) Pour quelles sommes S , obtenues par Léon, Noël peut-il obtenir une somme S' égale à S ?

Avec les notations précédentes, $S'=S$ est équivalent à $A=C$. On a alors $B = 45-2A$ d'où $S = 81A+450$.

Mais $2A = A+C \geq 1+2+\dots+6 = 21$ et $2A \leq 4+5+\dots+9 = 39$ donc $11 \leq A \leq 19$. Il y a 9 possibilités pour A donc 9 possibilités pour S : 1341, 1422, 1503, 1584, 1665, 1746, 1827, 1908, 1989.

b) Pour combien de sommes S y a-t-il exactement deux possibilités pour la somme S' ?

Il y a deux possibilités pour S' quand il y a deux triplets (A,B,C) donnant S.

$S = 100A + 10B + C = 100A' + 10B' + C'$ avec $A+B+C=45$ donne $B-B' = 11(A'-A)$.

Puisque B et B' sont compris entre 6 et 24, $|B'-B| \leq 18$. La seule possibilité avec $A < A'$ est donc $A' = A+1$ d'où $B' = B-11$ et $C' = C+10$. Comme B, B', C et C' sont compris entre 6 et 24, cela impose :

$17 \leq B \leq 24$ et $6 \leq C \leq 14$. On en déduit $23 \leq B+C \leq 38$ donc $7 \leq A = 45 - (B+C) \leq 22$.

Il y a donc $8 \times 9 = 72$ couples (B,C) possibles (A s'en déduit) donc il y a 72 sommes S qui donnent deux S'.

On les calcule par la formule $S = 4500 - 90B - 99C$ pour B variant de 17 à 24 et pour C variant de 6 à 14, puis on les trie par ordre croissant :

954, 1044, 1053, 1134, 1143, 1152, 1224, 1233, 1242, 1251, 1314, 1323, 1332, 1341, 1350, 1404, 1413, 1422, 1431, 1440, 1449, 1494, 1503, 1512, 1521, 1530, 1539, 1548, 1584, 1593, 1602, 1611, 1620, 1629, 1638, 1647, 1683, 1692, 1701, 1710, 1719, 1728, 1737, 1746, 1782, 1791, 1800, 1809, 1818, 1827, 1836, 1881, 1890, 1899, 1908, 1917, 1926, 1980, 1989, 1998, 2007, 2016, 2079, 2088, 2097, 2106, 2178, 2187, 2196, 2277, 2286, 2376.